

## 2.3 Applications

Thm 2.12: Chaque  $f \in \mathbb{C}[X]$  non-const. a une racine dans  $\mathbb{C}$ .

pf: On peut suppr. que  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Pour  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  on considère  $g_r(s) \stackrel{(*)}{=} \frac{f(r \cdot e^{2\pi i s})}{|f(r \cdot e^{2\pi i s}) / f(r)|}$ . Si  $f$  n'a pas de racine,

$g_r: [0,1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ . Comme  $g_0 \equiv 1$  on a que  $[g_r] = 0 \in \pi_1(S^1) \forall r$ .

Soit  $r > \max\{|a_1| + \dots + |a_n|, 1\}$ . Alors  $\forall z$  avec  $|z| = r$  on a  
 $|z^n| > (|a_1| + \dots + |a_n|) |z^{n-1}| > |a_1 z^{n-1}| + |a_2 z^{n-2}| + \dots + |a_n|$   
 $> |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|.$

$\Rightarrow f_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$  n'a pas des racines pour  $|z| = r$  si  $0 \leq t \leq 1$ .

Remplaçant  $f$  par  $f_t$  dans (b) on obtient une homot. entre  $g_r$  et  $e^{2\pi i s} \Rightarrow [g_r] = [g_0] = 0 \stackrel{2.10}{\Rightarrow} n = 0$ , donc

$f$  est constant  $\square$

Thm 2.12: (Borsuk-Ulam pour  $n=2$ )

Pour chaque  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue  $\exists x, -x \in S^2$  t.q.  $f(x) = f(-x)$

pf: Sinon on peut considérer  $g: S^2 \rightarrow S^1$   
 $x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$

Soit  $\eta: I \rightarrow S^2$  l'équateur  
 $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$  et  $h = g \circ \eta: I \rightarrow S^1$

Comme  $g(-x) = -g(x)$  on a  $h(t + \frac{1}{2}) = g(-\eta(t)) = -h(t) \forall t \in [0, \frac{1}{2}]$

Soit  $\tilde{h}: I \rightarrow \mathbb{R}$  le relèvement unique de  $h$  avec  $\tilde{h}(0) = 0$ .

Alors  $\tilde{h}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(t) + q\pi$  pour un  $q \in \mathbb{Z}$  impaire, car il faut  $e(2\pi i q) = -1$ .

Alors  $\tilde{h}(t+\frac{1}{2}) = \tilde{h}(t) + q\frac{1}{2}$  pour un  $q \in \mathbb{Z}$  impaire, car il faut  $e(2\pi i q) = -1$ .

Comme  $t \mapsto \tilde{h}(t+\frac{1}{2}) - \tilde{h}(t)$  est continue,  $q$  ne dépend pas de  $\epsilon$ .

$$\leadsto \tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + q\frac{1}{2} = \tilde{h}(0) + q \neq 0 \leadsto [h] \neq 0 \in \pi^1(S^1)$$

$$\text{Mais } [h] = g_*[\eta] \text{ est } [\eta] \in \pi^1(S^1) = \{0\} \quad \text{!} \quad \square$$

Remark: Le théorème implique, que à tout moment sur terre il existe deux points antipodaux avec la même élévation et température!